# حول حلول المعادلات التفاضلية الجزئية من نوع القطع المكافئ فى ثلاثة ابعاد بأستخدام طريقة تحليل ادومان

# On Numerical Solution of Partial Deferential Equations of the Parabolic Type in Three Dimension by using A domain Decomposition Method

د. عادل احمد حسن كبه [١] د. احمد محمد احمد الحاج [٢]

١ استاذ مشارك بقسم الرياضيات كلية التربيه جامعة وادي النيل

٢ استاذ مساعد بأمانة الشؤون العلمية قسم الشهادات جامعة الشيخ عبدالله البدري

المؤلف :adelkubba60@gmail.com

**المستخلص**

فى هذه الورقة درسنا المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية فى ثلاثة ابعاد من النوع القطع المكافئ ، استخدمنا طريقة تحليل ادومان لحل المعادلات التفاضلية الجزئية المضبوط ، قارنا نتائج حل المعادلات التفاضلية الجزئية مع النتائج العدديه وتوصلنا الى تقارب النتائج .

**الكلمات المفتاحية:**المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية في ثلاثة ابعاد– طريقة تحليل اودماين**-** القطع المكافئ– المعادلات التفاضلية التكاملية. المعادلات التفاضلية المضبوطة.

## Abstract

In this paper, we study the solution of linear partial differential equations in three dimensions of the parabolic type by using Adomian Decomposition Method(ADM). Comparing the numerical results of method with result of the exact solution we found that the results correlate.

**Keywords :** Linear partial differential equations in three dimensions – Adomain's method – Parabolic equations – Integral differential equations – Controlled differential equations.

## ١. المقدمة Introduction

طريقة التحليل التي قدمها وطورها العالم ادومايين في ثمانينات لحل المعادلات الخطية وغير خطية في الفترة (١٩٢٣-١٩٩٦) مثال على ذلك الجبرية والتفاضلية والمعادلات التفاضلية الجزئية وانظمة عددية والتكاملية والمعادلات المتاخرة والمعادلات التفاضلية التكاملية ......الخ. هذه الطريقة تؤدي الى حسابات دقيقة وحلول تقريبية متقاربة للمعادلات المؤثرة المحددة المتفق عليها والعشوائية الخطية وغير خطية والحل يمكن ان يتحقق الى اية درجة من التقريب للمعادلة التفاضلية [٣] . لاقت طريقة تحليل أدومايين الكثير من الاهتمام فى السنوات الاخيرة فى الرياضيات التطبيقية بشكل عام وفى نطاق حلول السلسلة بشكل خاص الطريقة أثبتت لكي تكون فعالة وقوية ويمكن أن تعالج بسهولة صنفا عريضاً من المعادلات التفاضلية الجزئية أو الاعتيادية الخطية أو غير الخطية ومعادلات تكاملية الخطية أو غير الخطية . لقد تبين أن طريقة التحليل تقارباً سريعاً للحل وتزود بعدة فوائد مهمة لذا فى هذا السياق الطريقة ستستخدم بنجاح لمعالجة انواع كثيرة من المعادلات التفاضلية الجزئية التى تظهر فى عدة نماذج فيزيائية وتطبيقات علمية ، تعامل الطريقة المسألة على نحو مباشر وفى اسلوب بسيط بدون استعمال اضطرابات خطية أو اي فرضية تقليدية اخرى التى قد تغير السلوك الفيزيائي للنموذج تحت المناقشة[٧] .

كما قدم INC Mustafa في [٦] حلا تقريبيا لمعادلات تفاضلية من نوع القطع المكافئ في فضاء ذي بعدين باستخدام طريقة تحليل اودمايين وقد وجد انها افضل تقريب دقيق للحل من الطرائق الاخرى ودرس التقارب لطريقة اودمايين في حالة المعادلات غير خطية في بعدين باستخدام فضاء هيلبرت (Hilbert ) .

أستخدم Shaher Momani [٢] في طريقة تحليل اودمايين لتقريب حلول مسائل انتشار الانتقال غير المستقرة المحققة وان الحل التقريبي محسوب على شكل سلسلة متقاربة بالعناصر الاساسية المحسوبة بسهولة الحسابات المعجلة باستعمال الظواهر شروط الضوضاء للمسائل غير المتجانسة واستنتج ان طريقة التحليل اودمايين استعملت لايجاد الحلول المضبوطة والتقريبية لمسائل الانتشار والانتقال وحصل على النتائج العددية التى لها فائدة في هذا النوع من المسائل ولاحظ ان الحالة غير المتجانسة عولجت عمليا باستخدام تأثير ظاهرة شروط الضوضاء وايضا ان طريقة تحليل ادومايين تقنية قوية وذات كفاءة عالية في ايجاد الحلول المضبوطة والتقريبية لصنوف عريضة من المسائل .

بعد ذلك قدم Santanu Saha Ray [5] حلا تحليليا لمعادلة Fokker Planck الجزئية بطريقة اودمايين باستعمال الشروط الابتدائية ، اذ ان الحل الصريح للمعادلة قدم في الشكل المغلق ، بعد ذلك الحل العددي تمثل بشكل تخطيطي ، ولقد طبقت الطريقة بتطبيق طريقتين مختلفتين مما ادى الي حالة جيدة جدا من ناحية الكفاءة والبساطة ، كما استنتج ان طريقة تحليل ادومايين بسيطة وليست هنالك فرضيات تقيدها ، وتراكيب السلسلة يمكن حسابها باستعمال اي رموز رياضية بسهولة التي تتلاقى عموما بسرعة كبيرة في المسائل الطبيعية الحقيقية ، وعندما تكون الحلول محسوبة بشكل عددي فان التقارب السريع يكون واضحا ولاحظ كذلك انه لم يواجه ضرورة للذاكرة ووقتا حسابيا كبيرا ولذلك فان الحجم الحسابي سيكون منخفضا .في هذا البحث ندرس الحل التقريبي لنموذج من المعادلات التفاضلية الجزئية في الثلاثة ابعاد من نوع القطع الكافئ بأستخدام طريقة تحليل ادومايين الذي يكون الحل على شكل متسلسلة منتهية تعطي نتائج عددية سريعة التقارب الي الحل المضبوط .

## ٢ . طريقة تحليل اودمايين Adomian Decomposition Method [8]

ان طريقة اودمايين تتضمن تحليل الدالة المجهولة $u(x, y)$ لأي معادلة الي مجموع من الاعداد اللانهائية للعناصر الاساسية التي تعرف بسلسلة التحليل

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,(x,y) \qquad (1)$$

حيث ان العناصر الاساسية $u(x,y)$ و $n \geq 0$ ستحدد بطريقة تكرارية ، طريقة التحليل التي تهتم بايجاد العناصر الاساسية .......... $u_0,u_1,u_2$بشكل منفردة ، اذ ان تحديد هذه العناصر الاساسية يمكن أن تنجز بطريقة سهلة عن طريق علاقة تكرارية تتضمن تكاملات بسيطة . لاعطاء نظرة توضيحية عامة عن طريقة تحليل ادومايين نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية اولا نكتبها في شكل البموثر على النحو الاتي:

$$Lu + Ru = g \qquad (2)$$

حيث ان L في اغلب الاحيان هي اشتقاق الرتبة المنخفضة التي هي فرضية لكي تكون معكوسة و R مؤثر تفاضلي خطي اخر و $g$ هو الحد المطلق . الان نقدم تطبيق المؤثر المعكوس $L^{-1}$ الى كلا الجانبين للمعادلة (٢) ويستخدم الشروط المعطاة للحصول على:

$$u = f - L^{-1}(Ru) \qquad (3)$$

حيث ان $f$ تمثل الحدود الظاهرة عن مكاملة الحد المطلق $g$ و من استعمال الشروط المعطاة التي نفرضها لكي توصف . كما اشير اليه قبل ذلك عرفت طريقة ادومايين الحل u بسلسلة لانهائية من العناصر الاساسية التي تعطي كما ياتي:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{4}$$

حيث العناصر الاساسية .......u0,u1,u2 تحدد عادة بشكل متكرر . نستبدل المعادلة (٤) الي كلا الجانبين في المعادلة (٣) تؤدي الي

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f - L^{-1}\left(R\left(\sum_{N=0}^{\infty} u_n\right)\right) \tag{5}$$

للبساطة المعادلة (٥) يمكن ان نعيد كتابتها بالشكل الاتي :

$$u_{0+}u_{1+}u_{2+}u_{3+} \dots = f - \mathrm{L}^{-1}\left(\mathrm{R}(u_{0+}u_{1+}u_{2+}u_{3+} \dots)\right) \tag{6}$$

لتركيب العلاقة التكرارية تحتاج الي تحديد العناصر الاساسية ... $u_{0+}u_{1+}u_{2+}u_{3+}$ من المهم ملاحظة ان طريقة تحليل ادوماين تقترح بان العنصر الاساسي الصفري $u_0$ هو عادة يعرف بالدالة $f$ التي وصفت اعلاه وبمعني اخر لجميع الحدود التي لم تتضمن تحت المؤثر المعكوس $L^{-1}$ الذي يظهر من البيانات الابتدائية ومن مكاملة الحدود غير المتجانسة . وفقا لذلك ، العلاقة التكرارية المشكلة يمكن تعريفها بالشكل الاتي:

$$u_{0=}f \tag{7}$$

$$u_{k+1} = -L^{-1}\left(R(u_k)\right), k \geq 0$$

أو بشكل مكافئ

$$u_{0=}f$$

$$u_0 = -L^{-1}\left(R(u_0)\right)$$

$$u_1 = -L^{-1}\left(R(u_1)\right)$$

$$u_2 = -L^{-1}\left(R(u_2)\right) \tag{8}$$

$$u_3 = -L^{-1}\left(R(u_3)\right),$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

تبين بشكل واضح بان العلاقة (٨) خفضت المعادلة التفاضلية قيد الاعتبار الى تصميم رائع من العناصر الاساسية المحسوبة ، بعد ان نحدد هذه المكونات الاساسية، ثمة نحن نستبدل الى المعادلة (٤) للحصول على الحل في شكل سلسلة [7] .

تبين بشكل اساسي من خلال العديد من الباحثين الذين وجدوا الحل المضبوط للمسائل ان السلسلة الحاصلة تتقارب بسرعة كبيرة الى ذلك الحل ، ان مفهوم تقارب سلسلة التحليل تتحري كليا من قبل العديد من الباحثين لتاكيد التقارب السريع للسلسلة الناتجة [7] . على اية حال للمسائل المعقدة الذي يكون شكل الحل مغلقا وليس قابلا للحصول فتبين للعديد من الباحثين ان تلك السلسلة حصلت عليه بتقييم بضعة شروط تعطي تقريبا بدرجة عالية من الدقة وان العدد المقطوع من الشروط يستخدم عادة للاغراض العددية ، عند مقارنتها بالتقنيات العددية الاخرى .، لدراسة المقارنة بين طريقة ادوماين وطريقة متسلسلة تايلور Taylor اختبرت كذلك لتبين ان طريقة تحليل ادومابن والمقارنات الاخرى بالطرائق التقليدية مثل طريقة الفروقات المنتهية التي اجريت مقارنة معها وتبين للعديد من الدارسين ان بضعة حدود لمتسلسلة التحليل تعطي نتائج عددية بدرجة عالية من الدقة [7] . من اجل توضيح ماذكر اعلاه نأخذ على سبيل المثال المعادلات الاتية:

$$u'(x) = u(x) \quad , \quad u(0) = A \tag{9}$$

نكتب المعادلة (٩) بشكل المؤثر فتصبح

$$Lu = u \ , \tag{10}$$

حيث ان المؤثر التفاضلي L يعطي بالشكل الاتي:

$$L = \frac{d}{dx} \ , \tag{11}$$

ولذا المؤثر المعكوس $L^{-1}$ يعرف بواسطة

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^{x}(\cdot) \ dx \tag{12}$$

نطبق $L^{-1}$ على جانبي المعادلة (١٠) ونستخدم الشروط الابتدائية نحصل علي :

$$L^{-1}(Lu) = L^{-1}(u) \ , \tag{13}$$

لذلك يكون لدينا

$$u(x) - u(0) = L^{-1}\,(u) \tag{14}$$

أو بشكل مكافئ

$$u(x) = A + L^{-1}\,(u) \tag{15}$$

نستبدل السلسلة المفروضة من معادلة (٥) الى كلا الجانبين للمعادلة (١٥) تعطي

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n\,(x) = A + L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\,(x)\right) \tag{16}$$

يكون للمعادلة (١٦)

$$u_0 \ (x)=A$$

$$u_{k+1}=L^{-1}\,(u_k(x)), \qquad k \geq 0 \tag{17}$$

يتبع مباشرة ولذلك نحصل عليهم

$u_0 \ (x)=A$

$u_1 \ (x)=L^{-1}(u_0 \ (x)) = Ax,$ $\quad u_2 \ (x)=L^{-1}(u_1 \ (x)) = A\frac{x^2}{2!}$

$$u_3(x) = L^{-1}(u_2\,(x)) \ = A\frac{x^3}{3!} \tag{18}$$

$\vdots$

نستبدل العلاقة (١٨) فى المعادلة (٥) تعطي الحل في شكل متسلسلة على النحو الاتي :

$$u(x) = A\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \ , \tag{19}$$

وفي شكل مغلق يكون الاتي :

$$u(x) = Ae^{x} \tag{20}$$

والمعادلة المشهورة كذلك معادلة Airy التى تكون بالشكل الاتي:

$$u''(x) = xu(x) \ , \ u(0) = A \ , \quad u'^{(0)} = B \tag{21}$$

نكتب المعادلة (٢١) بشكل المؤثر فتصبح

$$Lu = xu \tag{22}$$

حيث أن المؤثر التفاضلي L يعطى بالشكل الاتى:

$$L = \frac{d^2}{dx^2} \tag{23}$$

ولذا المؤثر المعكوس $L^{-1}$ يعرف بواسطة

$$L^{-1}(\cdot) = \iint_{00}^{xx} (\cdot)\, dx\, dx \tag{24}$$

مع المؤثر $L^{-1}$ على كلا الجانبين للمعادلة (٢١) وباستخدام الشروط الابتدائية نحصل عليهم

$$L^{-1}(Lu) = L^{-1}(xu) \tag{25}$$

ولذلك تكون

$$u(x) - xu'^{(0)} - u(0) = L^{-1}(xu) \tag{26}$$

أو بشكل مكافئ

$$u(x) = A + Bx + L^{-1}(xu) \tag{27}$$

نستبدل السلسلة المفروضة من معادلة (٥) الى كلا الجانبين للمعادلة (٢٧) تعطي

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = A + Bx + L^{-1}\left(x \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) \tag{28}$$

بعد طريقة التحليل نحصل على العلاقة التكرارية الاتية :

$$u_0(x) = A + Bx \, ,$$

$$u_{k+1}(x) = L^{-1}\big(xu_k(x)\big), k \geq o \tag{29}$$

ولذلك نحصل عليهم

$u_0(\mathrm{x}) = \mathrm{A} + \mathrm{Bx}$ ,

$$u_1(x) = L^{-1}\big(xu_0(x)\big) = A\frac{x^3}{6} + B\frac{x^4}{12}$$

$$u_2(x) = L^{-1}\big(xu_1(x)\big) = A\frac{x^6}{180} + B\frac{x^7}{504} \tag{30}$$

نستبدل العلاقة (٣٠) فى المعادلة (٥) تعطي الحل فى شكل متسلسلة على النحو الاتي:

$$u(x) = A\left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \cdots\right) + B\left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \cdots\right) \tag{31}$$

العناصر الاساسية الاخرى يمكن ان تحسب بسهولة لتحسين دقة التقريب .

## ٣. طريقة تحليل أدوماين لاشتقاق المعادلات التفاضلية الجزئية ثلاثية الابعاد

من معادلات التوصيل الحراري من نوع القطع المكافئ فى فضاء ثلاثي الابعاد التى تكون بالشكل الاتي:

$$u_{\mathrm{t}} = \mathrm{u}_{\mathrm{xx}} + \mathrm{u}_{\mathrm{yy}} + \mathrm{u}_{...} \qquad (32)$$

حيث ان $0 \leq x,\ y\ z\ \leq a$ , $t \geq 0$ وباستخدام الشروط الابتدائية للمعادلة (٣٢) تكون بالشكل الاتى:

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z\ ) \qquad (33)$$

حيث أن $0 \leq x,\ y\ z\ \leq a$ وأن $u \equiv u(x, y, z, t)$ تدل على درجة الحرارة لاية نقطة محدد مكانها في الموقع $(x, y, z)$ لحجم المستطيل فى اي وقت كان t [8] .نعيد اولا كتابة المعادلة (٣٢) فى شكل المؤثر على النحو الاتي:

$$L_t u = L_x u + L_y u + L_z u \qquad (34)$$

حيث ان المؤثرات التفاضلية $L_{\mathrm{z},}, L_{\mathrm{y},}, L_{\mathrm{x},}, L_{\mathrm{t},}$ تعرف بالشكل الاتي:

$$L_{\mathrm{t}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}, L_{\mathrm{x}} = \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}\ , L_{\mathrm{y}} = \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2}, L_{\mathrm{z}} = \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}^2}$$

فضلا عن ان المؤثر التكاملي أو المعكوس $L^{-1}$ موجود ومعطى كما يأتي :

$$L_{\mathrm{t}}^{-1}(\cdot) = \int_0^{\mathrm{t}} (\cdot)\ \mathrm{dt} \qquad (35)$$

نطبق المؤثر التكاملي $L_{\mathrm{t}}^{-1}$ الى كلا الجانبين للمعادلة (٣٤) ونستخدم الشروط الحدودية تؤدي الى

$$L_{\mathrm{t}}^{-1}(L_t u) = L_{\mathrm{t}}^{-1}\left(L_x u + L_y u + L_z u\right) \qquad (36)$$

نعالج الجانب الايسر من المعادلة وبأستخدام الشروط الابتدائية نحصل على : t(٣٦) بالنسبة الي

$$L_{\mathrm{t}}^{-1}(L_t u) = \int_0^t \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} \mathrm{dt} = \mathrm{u}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t})|_0^{\mathrm{t}}$$

$$= u(x, y, z, t) - u(x, y, z, 0)$$

$$L_{\mathrm{t}}^{-1}(L_t u) = u(x, y, z, t) - f(x, y, z) \qquad (37)$$

وبناءاً على ذلك نستبدل المعادلة (٣٧) فى المعادلة (٣٦) ينتج الاتي:

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z) + L_{\mathrm{t}}^{-1}\left(L_x u + L_y u + L_z u\right) \qquad (٣٨)$$

طريقة تحليل أودماين تعرف الحل $u(x, y, z, t)$ على شكل متسلسلة تعطى بواسطة

$$u(x,y,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,(x,y,z,t) \tag{39}$$

نستبدل المعادلة (٣٩) الى كلا الجانبين المعادلة (٣٨) نحصل على الاتي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f(x,y,z) + L_{\mathrm{t}}^{-1}\left(L_{\mathrm{x}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) + L_{\mathrm{y}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) + L_{\mathrm{z}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\right) \tag{40}$$

العناصر الاساسية $u_n(x,y,z,t)$ , $n \geq 0$ يمكن ان تحدد بالكامل بأستخدام العلاقة التكرارية الاتية :

$$u_0(x,y,z,t) = f(x,y,z),$$

$$u_{k+1}(x,y,z,t) = L_{\mathrm{t}}^{-1}\left(L_x u_k + L_y u_k + L_z u_k\right), \mathrm{k} \geq 0 \tag{41}$$

العناصر الاساسية يمكن ان تحدد بشكل تكراري بقدر مايلائم ولذلك العناصر الاساسية $u_n(x,y,z,t)$ ، $n \geq 0$ تحدد بالكامل والحل على شكل متسلسلة.

## ٤. بعض التطبيقات Some Applications

ومن اجل توضيح النتائج العددية لطريقة تحليل أدوماين سنستخدمها فى مناقشة مثالين لمعادلات الحرارة من نوع القطع المكافئ ثلاثية الابعاد مع الشروط الحدودية والابتدائية كما يأتي:

**مثال (١) [1]**

نأخذ مسألة القيم الحدودية و الابتدائية الاتية:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}^2} \qquad 0 < x,y,z < 1\,; t > 0 \tag{42}$$

$$u(x,y,z,0) = \sin(x+y+z) \qquad (0 \leq x,y,z \leq 1) \tag{43}$$

$$u(x,y,z,t) = e^{-3t}\sin(y+z) \qquad (0 \leq y,z \leq 1, t \geq 0)$$

$$u(1,y,z,t) = e^{-3t}\sin(1+y+z)$$

$$u(x,0,z,t) = e^{-3t}\sin(x+z)$$

$$u(x,1,z,t) = e^{-3t}\sin(x+1+z) \qquad (0 \leq x,z \leq 1)$$

$$u(x,y,0,t) = e^{-3t}\sin(x+y) \tag{44}$$

$$u(x,y,1,t) = e^{-3t}\sin(x+y+1) \qquad (0 \leq x,y,z \leq 1)$$

ونأخذ قيم المعلمات بالنسبة الى الخطوات الطول $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{1}{10}$ وخطوة الزمن

حيث ان $\Delta t = r(\Delta x)^2$ من اجل مقارنة النتائج العددية نستخدم الحل المضبوط للمعادلة (٤٢) = $r = \frac{1}{8}$ $u(x,y,z,t)$
$e^{-3t}\sin(x+y+z)$ حيث ان $(0 \le x,y,z \le 1)$ و $t \ge 0$ سنستخدم طريقة أدوماين على المثال (١) بالنسبة للمعادلة (٤٢) نطبق المؤثر التفاضلي L إلى جانبي المعادلة نحصل على :

$$L_t u = L_x u + L_y u + L_z u$$

نطبق المؤثر المعكوس $L_t^{-1}$ وفق المعادلة (٣٦) والمعادلة (٣٧) نستخدم الشرط الابتدائي (٤٣) ينتج الاتي:

$$u(x,y,z,t) = \sin(x+y+z) + L_t^{-1}(L_x u + L_y u + L_z u) \qquad (45)$$

الأن نستخدم تحليل أدوماين

$$u(x,y,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y,z,t) \qquad (46)$$

نستبدل المعادلة (٤٦) الى كلا الجانبين للمعادلة (٤٥) ينتج التي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sin(x+y+z) + L_t^{-1}\left(L_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) + L_y\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) + L_z\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\right) \qquad (47)$$

العناصر الاساسية $u_n(x,y,z,t)$ و $n \ge 0$ يمكن ان نحدد بأستخدام العلاقة التكرارية الاتية:

$$u_0(x,y,z,t) = sin(x+y+z)$$

$$u_1(x,y,z,t) = -3sin(x+y+z)$$

$$u_2(x,y,z,t) = \frac{(3t)^2}{2} sin(x+y+z)$$

$$u_3(x,y,z,t) = -\frac{(3t)^2}{6} sin(x+y+z)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

وعلى وفق ذلك نحصل على متسلسلة التحليل المعادلة (٤٥) وذلك بجمع العناصر الاساسية أعلاه فينتج الحل الاتى :

$$u(x,y,z,t) = -\frac{(3t)^2}{6} sin(x+y+z)\left(1 - 3t + \frac{(3t)^2}{2!} - -\frac{(3t)^3}{3!} \mp \cdots\right) \qquad (48)$$

المعادلة (٤٨) تبين الحل التقريبي للمعادلة (٤٢) مع الشرط الابتدائى (٤٣) ومنها نحسب الحل العددي للمعادلة الذي يكون تقريبياً .

**المثال (٢) [7]**

نأخذ قيم الحدودية و الابتدائية الاتية:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}}=\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}^2} \qquad 0<x,y,z<1\,;t>0 \qquad (49)$$

$$u(\mathrm{x,y,z},0)=2\mathrm{sinx,siny,sinz} \qquad (0\le \mathrm{x,y,z}\le \pi) \qquad (50)$$

$$u(0,\mathrm{y,z,t})=u(\pi,y,z,t)=0$$

$$u(\mathrm{x},0,\mathrm{z,t})=u(x,\pi,z,t)=0 \qquad (0\le \mathrm{x,y,z}\le \pi) \qquad (51)$$

$$u(\mathrm{x,y,o,t})=u(x,y,\pi,t)=0$$

ونأخذ قيم المعلمات بالنسبة الى خطوات الطول $\Delta x=\Delta y=\Delta z=\frac{\pi}{10}$ وخطوة الزمن $\Delta t=r(\Delta x)^{2}$

حيث أن $r=\frac{1}{8}$ من اجل مقارنة النتائج العددية نستخدم الحل المضبوط للمعادلة (٤٩) حيث أن $u(\mathrm{x,y,z,t})=$ $2\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}\mathrm{sinx,siny,sinz}$وبألاسلوب نفسه بالمثال (١) نستخدم طريقة تحليل ادوماين على المثال (٢) بالنسبة للمعادلة (٤٩) والشرط الابتدائي (٥٠) نطبق المؤثر المعكوس $L_{\mathrm{t}}^{-1}$ على وفق المعادلة (٣٦) والمعادلة (٣٧) ينتج الاتي:

$$u(\mathrm{x,y,z},t)=2\mathrm{sinx,siny,sinz}L_{\mathrm{t}}^{-1}\left(L_x u+L_y u+L_z u\right) \qquad (52)$$

نستخدم متسلسلة تحليل ادوماين للمعادلة (٣٦) كذلك نستبدل الى كلا جانبي المعادلة (٥٢) على النحو الاتي:

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=2\sin x siny\sin z+L_{\mathrm{t}}^{-1}\left(L_{\mathrm{x}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n\right)+L_{\mathrm{y}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n\right)+L_{\mathrm{z}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n\right)\right) \qquad (53)$$

العناصر الاساسية $u_n(x,y,z,t)$ و $n\ge 0$ يمكن ان نحدد باستخدام العلاقة التكرارية الاتية:

$$u_0(x,y,z,t)=2sinx\ siny\ sinz$$

$$u_1(x,y,z,t)=-2(3t)sinx\ siny\ sinz$$

$$u_2(x,y,z,t)=2\frac{(3t)^2}{2!}sinx\ siny\ sinz$$

$$u_3(x,y,z,t)=-2\frac{(3t)^3}{3!}sinx\ siny\ sinz$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

على وفق ذلك نحصل على متسلسلة التحليل المعادلة (٥٢) وذلك بجمع العناصر الاساسية اعلاه فينتج الحل الاتي:

$$u(x,y,z,t)=2sinx\ siny\ sinz(1-3t+\tfrac{(3t)^2}{2!}-\tfrac{(3t)^3}{3!}\mp\cdots) \qquad (54)$$

*المعادلة* (٥٤) تبين الحل التقريبي للمعادلة (٤٩) مع الشرط الابتدائي (٥٠) ومنها نحسب الحل العددي الذي يكون تقريبي ، الجدول (١) بالنسبة للمثال (١) يحتوي على النتائج العددية لمعادلة الحرارة من النوع القطع المكافئ فى ثلاثة ابعاد بأستخدام طريقة تحليل ادوماين عند حجم خطوة الطول $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{1}{10}$ وخطوة الزمن $\Delta t = r(\Delta x)^2$ حيث ان $r = \frac{1}{8}$ من اجل مقارنة النتائج العددية نستخدم الحل المضبوط. نقدم الشكل (١) للمقارنة بين قيم النتائج العددية للطريقة مع الحل المضبوط.

الجدول (٢) بالنسبة للمثال (٢) يحتوي النتائج العددية لمعادلة الحرارة من نوع القطع المكافئ في ثلاثة ابعاد بأستخدام طريقة تحليل ادوماين عند حجم خطوة الطول $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{\pi}{10}$

وخطوة الزمن $\Delta t = r(\Delta x)^{٢}$ حيث ان $r = \frac{1}{8}$ من اجل مقارنة النتائج العددية نستخدم الحل المضبوط. نقدم الشكل (٢) للمقارنة بين قيم النتائج العددية للطريقة مع الحل المضبوط.

**<u>الجدول (١)</u>**

الجدول التالي يوضح مقارنة الحل العددي لطريقة تحليل ادومابن مع الحل المضبوط لقيم الدالة $f$ عند نقاط $(x_n, y_m, z_k, t_i)$ المختارة التى تحسب عند حجم خطوة الطول $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{1}{10}$ وناخذ $r = \frac{1}{8}$ وحجم خطوة الزمن $\Delta t = r(\Delta x)^2$ .

| Point (n,m,k,i) | Exact Solution | Adomian Decomposition Method |
|---|---|---|
| (6,7,2,1) | ٠,٥٥٩٠١٦٩٩٤٣٧٤٩٤٧ | ٠,٥٥٩٠١٦٩٩٤٣٧٤٩٤٧ |
| (3,9,5,1) | ١,٩٠٢١١٣٠٣٢٥٩٠٣٠٧ | ١,٩٠٢١١٣٠٣٢٥٩٠٣٠٧ |
| (4,3,4,2) | ١,٠٢٤٦٧٨٥٦٥٩٦٧٥١٥ | ١,٠٢٤٦٧٨٥٦٥٩٦٧٥١٥ |
| (3,5,6,2) | ١,١٩٩٧١٤٥٦١٥٦٠٨٦٨ | ١,١٩٩٧١٤٥٦١٥٦٠٨٦٨ |
| (5,4,2,3) | ٠,٧١١٩٩٦٠٤٥٥١٣١٦٥ | ١,٤٢٩٠٤٧٣٠٥٢٣٠١٧١ |
| (4,5,10,3) | ٠,٩٩٢١٠٤٨٤٣٨٧٥٣٤٣ | ٠,٣٧٥٦٤٧٣١٤٥٢٤٧٥٥ |
| (3,5,3,4) | ٠,٧٠٩٣٣١٠٦٠٣١٢٧٧٠ | ٠,١٧٠٩١٢٤٤٣٤٥٤٥٥٤ |
| (6,8,7,4) | ٠,٩٦٢٩٥٣٢٤٠٨٧٦١٠٥ | ١,٣٧٧١٢٣٦١٣١٦٣٧١٤ |
| (٥,٤,٣,٥) | ٠,٩٤٩٢١٢٦٧٢٩٥٦٧٣٨ | ٠,٧٨٠٠٤١٨٩٧٦٠٧٥٨٢ |
| (٦,٧,٨,٥) | ١,٣٢٧٠٨٦٥٤١٤٩٦٦٩٧ | ١,٣٢٧٠٨٦٥٤١٤٩٦٦٩٧ |
| (٤,٣,٥,٦) | ٠,٧٥١٦٩٩٤٨٠١٥٠٨٠٨ | ٠,٧٥١٦٩٩٤٨٠١٥٠٨٠٨ |

| | | |
|---|---|---|
| (٥,٥,١٠,٦) | ٠,٤٦٤٥٧٥٨٢٨٠٥٨٨٢٦ | ٠,٤٦٤٥٧٥٨٢٨٠٥٨٨٢٦ |
| (٢,٢,٤,٧) | ٠,١٢٣٧٤٠٠٤٩٩٥٠٧٩٠ | ٠,١٢٣٧٤٠٠٤٩٩٥٠٧٩٠ |
| (٤,٤,٨,٧) | ٠,٨٤٨١٢٦٩١٩٦٧١٥٤٧ | ٠,٨٤٨١٢٦٩١٩٦٧١٥٤٧ |
| (٤,١٠,٣,٨) | ٠,٢٢٦٨١٥٦٠٣٤٨٢٨٥٤ | ٠,٢٢٦٨١٥٦٠٣٤٨٢٨٥٤ |
| (٥,٥,٧,٨) | ١,٣٢٧٨٠١٦٧٠٣٢٥٠٨٢ | ١,٣٢٧٨٠١٦٧٠٣٢٥٠٨٢ |
| (٦,٦,٤,٩) | ١,٢٠٣٣٦٧٢٧٩٠٦٣٥٨٤ | ١,٢٠٣٣٦٧٢٧٩٠٦٣٥٨٤ |
| (٣,٧,٩,٩) | ٠,٤٨٨٧٤٧١٦٣٤٦٢٤٤٨ | ٠,٤٨٨٧٤٧١٦٣٤٦٢٤٤٨ |
| (٣,٣,٤,١٠) | ٠,٤٠٠٦٤٦٩٩٤٠٦١٩١٤ | ٠,٤٠٠٦٤٦٩٩٤٠٦١٩١٤ |
| (٢,٣,٦,١٠) | ٠,٢٦٠٣٥٦١٩٩٢١٤٤٤٨ | ٠,٢٦٠٣٥٦١٩٩٢١٤٤٤٨ |
| (٥,٥,٦,١١) | ١,٢٤٩٤١٢٤٩٣٥٦٠٨٦٢ | ١,٢٤٩٤١٢٤٩٣٥٦٠٨٦٢ |
| (٤,٣,١٠,١١) | ٠,٢٠٢٩٧٩٣٦٣٩٣٨٦٩٧ | ٠,٢٠٢٩٧٩٣٦٣٩٣٨٦٩٧ |

**الجدول (٢)**

الجدول التالي يوضح مقارنة الحل العددي لطريقة تحليل ادومايين مع الحل المضبوط لقيم الدالة $f$ عند نقاط ( $x_n, y_m, z_k, t_i$) المختارة التى تحسب عند حجم خطوة الطول $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{\pi}{10}$ وناخذ $r = \frac{1}{8}$ وحجم خطوة الزمن $\Delta t = r(\Delta x)^2$.

| **Point (n,m,k,i)** | **Exact Solution** | **Adomian Decomposition Method** |
|---|---|---|
| (3,4,3,1) | 0.559016994374947 | 0.559016994374947 |
| (5,6,6,1) | 1.902113032590307 | 1.902113032590307 |
| (5,7,3,2) | 1.024678565967515 | 1.024678565967515 |
| (4,5,8,2) | 1.199714561560868 | 1.199714561560868 |
| (6,8,7,3) | 1.429047305230171 | 1.429047305230171 |
| (4,4,10,3) | 0.375647314524755 | 0.375647314524755 |
| (2,6,2,4) | 0.170912443454554 | 0.170912443454554 |
| (8,7,6,4) | 1.377123613163714 | 1.377123613163714 |
| (5,4,3,5) | 0.780041897607582 | 0.780041897607582 |
| (6,7,8,5) | 1.327086541496697 | 1.327086541496697 |
| (4,3,5,6) | 0.751699480150808 | 0.751699480150808 |
| (5,5,10,6) | 0.464575828058826 | 0.464575828058826 |

| | | |
|---|---|---|
| (2,2,4,7) | 0.123740049950790 | 0.123740049950790 |
| (4,4,8,7) | 0.848126919671547 | 0.848126919671547 |
| (4,10,3,8) | 0.226815603482854 | 0.226815603482854 |
| (5,5,7,8) | 1.327801670325082 | 1.327801670325082 |
| (6,6,4,9) | 1.203367279063584 | 1.203367279063584 |
| (3,7,9,9) | 0.488747163462448 | 0.488747163462448 |
| (3,3,4,10) | 0.400646994061914 | 0.400646994061914 |
| (2,3,6,10) | 0.260356199214448 | 0.260356199214448 |
| (5,5,6,11) | 1.249412493560862 | 1.249412493560862 |
| (4,3,10,11) | 0.202979363938697 | 0.202979363938697 |

## ٥.الخلاصة

درسنا طريقة تحليل ادوماين ولاحظنا أن الطريقة التى استخدمت لايجاد الحلول التقريبية والطريقة لاتتطلب حسابات كبيرة بأستخدام الحاسب الالي ولذلك استنتجنا من النتائج العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من نوع القطع المكافئ فى ثلاثة ابعاد وجدنا ان الطريقة قريبة تماماً من الحل المضبوط وان سلسلة التحليل تكون ذات كفاية من خلال عملية التكرار المستمر للتوصل الى نتائج متقاربة عند عدد محدود من العناصر الاساسية.

## References المصادر

[1]Mingshu, M. and Tongke, W., (2000), “A family of High Order Accuracy Explicit Difference Schemes with Branching Stability for Solving 3-D Parabolic Partial Differential Equation”, J. Applied Mathematics and Mechanics, University Shanghai China, Vol. 21, No. 10, pp. 1207-1212.
[2]Momani, S., (2008), “A decomposition Method for Solving Unsteady Convection Diffusion Problems”, TUBITAK, Turk.J. Math. Vol. 32, pp. 51-60.
[3]Mustafa, I., (2005), “Decomposition Method for Solving Parabolic Equations in Finite Domains”, Inc. J. Zhejiang Univ. Sci. Vol. 6A, No, 10, pp. 1058-1064 http://www.zju.edu.cn/jzus.
[4]Mustafa, I., (2004), “On Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Decomposition Method”, Kragujevac J. Math. Vol. 26, pp. 153-164.
[5]Ray, S.S., (2010), “A new Application of Adomian Decomposition Method for the Solution of Fractional Fokker Planck Equation with Insulated Ends”, J. Appli. Math. & Informatics,Vol. 28, No. 6, pp. 1157-1169 http://www.kcam.biz.
[6] Sanchez, F., Abbaui, K. and Cherruault, Y., (2000), “Beyond theThin-Sheet Approximation: A domian’s Decomposition”,Optics Commun. Vol. 173, pp. 397-401.
[7] Wazwaz,A.M,(2009)”partial Differential Equations and Solitary Waves THEORY “Higher Education Press, Beijing and Springer-Veriag Bertin Heidelberg.
[8] Dr. AbdalgFour, M, Mohamuod .H, (2011), Adomian Decomposition Method for Solving Parabolic Partial Differential Equations in Three Dimensions .